

## 1. JEODEZİK GÖZLEMLER VE RASGELE DEĞİŞKEN ÖZELLİKLERİ

Jeodezik data yada veri kelimesinden ne anlaşıldığını açıklayabilmek için önce jeodezik ölçünün ne anlama geldiğinin bilinmesi gerekir. Böyle bir kavramın açıklanabilmesi için ilke olarak jeodezinin genel tanımından hareket etmek yeterli olur.

Bilindiği gibi; jeodezi  $\gamma\eta = jeo$ : yer veya dünya ,  $\delta\alpha\iota\omega = I = dezi$  bölmek değerlendirmek anlamına gelen iki kelimenin birleşmesinden türeyen bir sözcüktür. Buna göre, jeodezinin kısaca kelime manası “yeryüzünün ölçülmesi, bölünmesi ve değerlendirmesi anlamına” gelen bir ifade ile açıklanabilmektedir. Ancak, böyle bir disiplinin ilk ilmi anlamdaki tanımı, 1880 yılında. R. Helmert tarafından yapılmıştır. F. R. Helmert’in bu klasik tanımına göre “Jeodezi yeryüzünün ölçülmesi ve projeksiyonu ilmidir” şeklinde ilgili kaynaklarda yer aldığı görülmektedir.

Ne var ki, bu tanım daha sonraları jeodezinin konularının çeşitlenerek genişlemesi karşısında yetersiz kalmış ve bu tanıma okyanus dibi yüzeyinin ve dünyanın dış gravite alanının belirlenmesi konuları da eklenerek, yeni ve daha geniş bir tanıma ihtiyaç duyulmuştur. Böyle bir tanım; F.R. Helmert tarafından 1880 yılında yapılmış olan ilk klasik tanıma sözü edilen konularda ilave edilerek yeni bir tanım; “Jeodezi yeryüzünün ölçülmesi ve haritasının yapılması yanında okyanus dibi yüzeyinin ve dünyanın dış gravite alanının belirlenmesi ilmidir” şeklinde genişletilerek yeniden yapılmıştır (W. Torge 1980). Yapılan bu yeni ve genişletilmiş tanıma göre de çoğu zaman; jeodezi yerbilimleri ve mühendislik disiplinleri arasında ele alınabilecek bir disiplin olduğu ayrıca vurgulanmıştır (Gerke 1972).

Günümüzde ise, çoğalan konular ve çeşitlenen uğraş alanlarının artması karşısında bu tanım da yetersiz kalmaktadır. Böyle bir tanımı günümüz koşullarına uygun hale getirebilmek için konuyla ilgili yapılmış olan mevcut son tanıma, baraj, yol, viyadük, gökdelen gibi bazı sanat yapılarının ve yerin kabuk hareketlerinin, heyelanların denetlenmesi, çeşitli mühendislik projelerinin uygulaması, yeryüzü arazi parçalarının düzenlenmesi..vs gibi konuların da ilave edilmesi ile yeni bir tanım daha yapıp mevcut son tanım daha da genişletilebilir. Buna göre; jeodezinin daha güncel bir tanımı olarak” “Jeodezi yeryüzünün ölçülmesi ve haritasının yapılması yanında okyanus dibi yüzeyinin ve dünyanın dış gravite alanının belirlenmesi, yerin diğer gök cisimleri ile olan geometrik ilişkilerinin belirlenmesi ve baraj, yol, viyadük, gökdelen gibi bazı sanat yapılarının, yerin kabuk hareketlerinin, heyelanların denetlenmesi, çeşitli mühendislik projelerinin uygulaması, yeryüzü arazi parçalarının düzenlenmesi vs. konuları ile uğraşan birilimdir” diye tanımlanabilir.

Burada yapılan tanımlardan görüldüğü gibi, bu tür faaliyetleri yerine getirirken kullanılan ölçü büyüklükleri, yer yüzünün geometrik şeklini belirlemek için açılar ve uzunluk ya da uzunluk farklarıdır. Yeryuvarının dış gravite alanını belirlemek için de yeryüzü noktalarındaki gravite değerleridir. Ancak, bilindiği üzere, açılar ve uzunluklar geometrik şekil belirleyen büyüklükler olmaktadır. Buna karşılık, yeryüzü noktalarındaki gravite değerleri de sadece fiziksel bir büyüklük olmaktadır. Bu nedenle, ilk bakışta Helmert’in 1880 yılında yapmış olduğu ilk klasik tanımına göre jeodezik ölçü sadece açı ve uzunluk yada uzunluk farkları sayılabilmesine rağmen, sonraları uğraş alanlarının genişlemesi ile tüm bu konuları da içerecek şekilde yapılan daha genel tanıma dayanılarak, konuya farklı bir bakış olarak, çalışmalar için yeryüzünde yapılan gravite ölçüleri, salt fiziksel ölçüler şeklinde ele alınabilmesi yanında jeodezik faaliyetler yönünden farklı bir yaklaşım olarak, çok özel durumlarda jeodezik ölçüler sınıfından sayılabilir. Fakat genelde gravite ölçüleri; farklı tür ve

teknik özelliklere sahip ölçüler olduklarından her zaman böyle bir söz söylenemez. Söylenmesi bir kavram karmaşasına neden olabilir.

Sonuçta bu açıklamalardan anlaşılmalı; jeodezi doğal bir büyüklüğü yani yer yuvarının şeklini, konumunu ve özelliklerini konu alan bir bilim dalı olmaktadır. Bilindiği gibi, her doğal olayın bir gerçek değeri mevcuttur. Öyle ise, böyle olaylar veya nesnelere daima aynı özelliğe sahip, her zaman tek anlam taşıyan düşünsel ifadelerle temsil edilerek incelenmeleri gerekir. Bu gibi durumlara uygun bir ifade tarzı, ancak sayısal bilgi ve işlemlerde bulunabilir. Bu nedenle, jeodezi gibi tüm mühendislik dallarında, ilgili konuların açıklanması ve incelenmesinde sözel ifadeler yerine, sayısal ifadeler kullanılmaktadır.

Jeodezik olayları incelemek için kullanılan bütün sayısal bilgiler bir deney yada ölçme sonucunda elde edilmiş *kantitatif* özelliğe sahip bilgiler olmaktadır. Bunlar içerdikleri rasgele hataların özelliklerinden dolayı kesinsizliğe sahip rasgele özellikte değişkenler olarak ele alınabilirler. Bu özelliğe sahip verilerden hiçbir zaman bir olayın ya da nesnenin gerçek değerler elde edilemez. Ancak, bazı varsayımlara göre hesaplanmış ve gerçek değeri en iyi temsil eden en muhtemel ya da kesin değerleri bulunabilir. Kesin değerler, hatalı gözlem ya da deneysel verilerden özel yollarla elde edildiklerinden her biri belli bir doğruluğa ve inceliği sahip olur. Bunların gerçek değerleri ne derece yansıttıkları ancak istatistik kurallarla incelenebilir. Burada, bu temel ilke göz önüne alınarak, çeşitli şekillerde ve yöntemlerle elde edilmiş olan jeodezik gözlemlerden hesaplanan kesin değerlerin gerçeği, hangi oranda yansıttıklarının belirlenmesi işlemi; *Jeodezik data veya verilerin istatistik analizi* olarak ele alınmaktadır. Bu nedenle, hazırlanan bu eserde, konuyla ilgili yöntemler ele alınarak incelenmiştir.

## 2. JEODEZİK GÖZLEMLER VE ÖZELLİKLERİ

Doğal bir olayı sayısal olarak ifade edebilmek için, bu olayı aynı türden birim kabul edilen bir büyüklüğün katları cinsinden ifade etmek yeterli olur. Uygulamada, böyle bir modelleme işlemlerine ölçme denmektedir. Her modellemeden elde edilen sonuçlara da; ölçü ya da gözlem değerleri olarak adlandırılır.

Jeodezik nesnelere ya da konular için de durum aynı olmaktadır. Yani, jeodezik bir büyüklüğü sayısal olarak temsil etmek için aynı tür özelliğe sahip bir büyüklüğü birim seçip, bu nesneyi birim seçilen büyüklüğün katları cinsinden ifade etme işlemine Jeodezik ölçme ve bir jeodezik ölçmeden elde edilen sayısal sonuç değerlerine de Jeodezik ölçü ya da gözlemler denmektedir. Böylece, doğada var olan ve her zaman tek anlamlı; yani bir gerçek değere sahip olan bir jeodezik olay ya da nesne, aynı özelliğe sahip, belirsizliği olmayan, kesin bir ifade ile her zaman tek veya kesin anlam taşıyan bir dille yani sayılarla ifade edilmiş olur. Bu tür sayılar, jeodezik ölçü yada jeodezik gözlem veya jeodezik data (*veri*) değerleri olmaktadır.

Bu açıklamadan görüldüğü gibi, jeodezik gözlemler (*datalar=veriler*) bir modelleme sonucunda elde edilmiş bilgiler olmaktadır. Her modelleme işlemini olumsuz yönde etkileyen bazı olaylar bulunmaktadır. Ayrıca, bir modelleme işlemi için bu tür olumsuzluklara neden olan olaylara, hata kaynakları denmektedir. Her gözlemlerde olumsuzluğa neden olan bu olaylar yada diğer bir ifade ile hatalara neden olan etkenler, bir arada ele alındıklarında bunlar;

- *Ortamdan kaynaklanan olumsuzluklar,*
- *Kişilerden kaynaklanan olumsuzluklar,*
- *Aletlerden kaynaklanan olumsuzluklar,*

şeklinde üç grup altında ele alınabilirler. Bu gibi nedenlerin, jeodezik ölçü ya da gözlem değerleri üzerindeki olumsuz etkilerinin sonuçları da ölçü hataları olarak değerlendirilir.

Jeodezik ölçü ya da gözlem değerleri için; ortamdan, kişilerden veya aletlerden kaynaklandıkları varsayılan hatalar, sergiledikleri karakterlerine bağlı olarak farklı şekillerde ele alınarak gruplandırılabilirler. Bunlar; bir akış diyagramı halinde,



Tablo 1: Hata türleri

şeklinde özetlenebilir.

**Kaba hatalar:** Bu hatalar daha çok bir dalgınlık sonucunda meydana gelirler. Kaba yanlışlıklar olarak yorumlanırlar. Ekseriyetle kişilerden kaynaklanırlar. Ölçü sayısını artırmakla, ölçülerin karşılaştırmaları sonucunda hemen fark edilebilirler. Miktarca büyük değerdedirler. Örneğin, teodolitle bir açı okumasında  $66^g$  yerine  $99^g$  gibi bir değer okunmuş olması bu tür hatalara bir örnek teşkil etmektedir.

**Sistemik Hatalar:** Bunlar özellikleri gereği üç farklı grup altında ele alınabilirler.

Bunlardan,

- **sabit sistemik hatalar;** ölçüleri her seferinde sabit bir değer kadar etkileyen hatalardır. Miktar ve işaretçe daima sabit bir değerde olurlar. Daha çok ölçü anında aletten kaynaklanırlar. Bunlar, gözlemlerden uygun ölçü teknik ya da yöntemi kullanılarak giderilebilirler. Örneğin, teodolitle açı ölçüsü yaparken tam dizi gözlem yönteminin kullanılması, veya nivelmanda nivonun iki miraya eşit mesafede bir yere kurularak yükseklik farkının ölçülmesi, “böyle bir ölçü sonucunda hem küreselliğin, hem de optik eksenin düzeç eksenine paralel olmamasından kaynaklanan sabit sistemik hatalar giderilmiş olur”, verilebilir.
- **Tek taraflı sistemik hatalar;** Bunlar ölçü değerlerini hep aynı yönde etkileyen hatalardır. Miktarca farklı olabilirler ancak işaretçe sabittirler. Yani ya hep pozitif ya da hep negatif olurlar. Buna bir örnek, arazide zemine işaretlenmiş ancak birkaç şerit metre boyundaki mesafede bulunan iki nokta arasında yatay mesafenin portreler biçiminde parçalı ölçülmesinde yapılan; doğrultuya tam giremmeden dolayı oluşan hatalar verilebilir. Bu tür hatalar ölçü sayısı artırılmakla tam giderilemez. Ancak belli bir miktar azaltılabilirler.
- **Çift taraflı sistemik hatalar;** Bu tür hatalar ölçüleri belli parametrelerin fonksiyonları şeklinde etkilerler. Miktarca küçük olmalarına rağmen pozitif ve negatif işaretli olurlar. Ancak, işaret değişimi hataya neden olan parametrenin yada parametrelerin değişimine göre belli aralıklarla olur. Çok kısa aralıkta işaret değişmez.

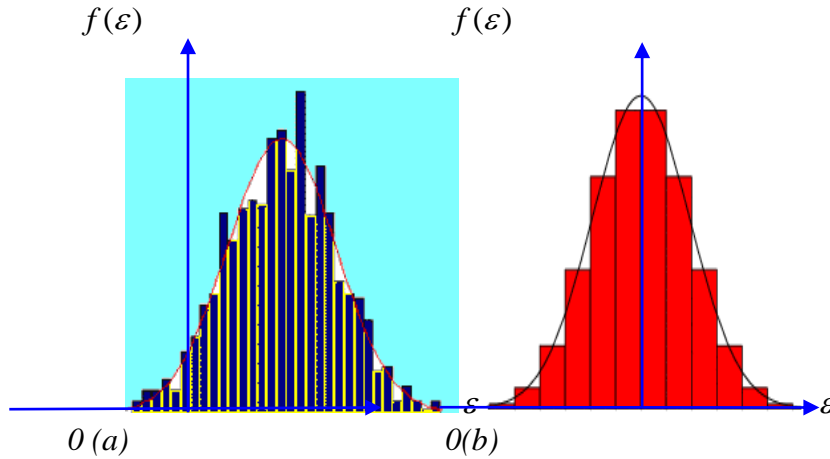
Bunlar, neden olan parametrenin fonksiyonu şeklinde hesaplanarak işaretlerine göre ölçülere düzeltme olarak ilave edilirler. Bu duruma bir örnek, çelik şerit metre ile uzunluk ölçüsünde ısı düzeltmesi verilebilir. Sıcaklık değiştikçe şerit metrenin boyu da değişeceğinden, olması gereken değerden daha fazla ya da az değer ölçer. Her seferinde bu miktar hesaplanarak ölçülen uzunluk değerine düzeltme olarak eklenir. Ölçü sayısını artırmakla ya da uygun ölçü yöntemi kullanmakla bu hatalar giderilemezler.

**Rasgele(tesadüfi) Hatalar:** Bu tür hatalara literatürde düzensiz hatalar, gelişigüzel hatalar..vs. gibi isimler altında da rastlamak mümkündür. Günümüzde yaygın kullanılanı, rasgele hata sözcüğüdür.

Rasgele hatalar; nedeni tam olarak bilinmeyen ya da bilinmeyen çok sayıda elemanter hatanın birlikte neden olduğu hatalardır. Miktarca çok küçük değerde olabilecekleri gibi pozitif ve negatif işaretli de olabilirler. Kısa aralıkta hemen işaret değiştirirler. Gözlemlerde her zaman var oldukları düşünülür. Örneğin, bir düzlem üçgenin ölçülmüş üç açısının değerinin toplamı  $200^\circ$  olsa bile her bir açı hatasızdır söylenemez. Açılardaki rasgele ölçü hataları pozitif veya negatif işaretli olacıklardan toplam etkileri sıfır olabilir. Bu düşünceden dolayı toplam etkilerine bakılarak, ölçü değerleri hiçbir zaman hatasızdır denemez. Bunların her zaman ölçülerin içerisinde saklandıkları düşünülür. Ancak, bunların sonuç özellikleri hakkında bir takım bilgilere sahip olunmaktadır. Bu tür bilgiler aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- Ölçü sayısı sonsuz olunca, pozitif olanlarının sayısı negatif olanlarına eşit olur. Bir diğer ifade ile toplamları sıfırdır. Ya da pozitif rasgele hata yapma olasılığı negatif rasgele hata yapma olasılığına denk olur.
- Büyük miktarda olanlarının sayısı, küçük miktarda olanlarının sayısından daha az sayıda olmaktadır.
- Ayrıca, rasgele hatalar çok kısa aralıklarla sıkça işaret değiştirilirler. Neticede; negatif ve pozitif işaretli olabilirler.

Bu özelliklerinde dolayı;



Şekil 1: Rasgele ölçü hatalarının dağılımı

Şekil 1’de verildiği gibi bir histogramla ifade edilebilirler.

Bu durumuyla, rasgele hatalar, anormal durumdaki köşe değerleri dikkate alınmadığında, modu medyanına eşit olan bir normal dağılımda oldukları kabul edilir. Gauss’un çan eğrisine

uygun bir dağılım sergiledikleri söylenebilir. Sergiledikleri özellikler gereği, sadece istatistik kurallarla incelenebilirler. Dağılımın parametre değerleri olan umut ve varyans değerleri, rasgele hataları içeren gözlem değerlerinden istatistik kestirim kuramlarından biriyle kestirilebilirler. Özetle, rasgele ölçü hataları istatistik anlamda bir rasgele değişken özelliğine sahip oldukları rahatlıkla söylenebilir.

Neticede; bir  $\ell_i$  jeodezik gözlemi,  $\mu_i$  trend (gerçek değer) ve  $\varepsilon_i$  rasgele ölçü hatalarını içeren iki parametrenin bir arada bulunmasından,

$$\ell_i = \mu_i - \varepsilon_i$$

şeklinde oluşmaktadır.

Burada,  $\mu_i$  trend veya gerçek değer; sabit bir sayı ve  $\varepsilon_i$  rasgele ölçü hataları da istatistik anlamda bir rasgele değişken olduklarından, “istatistik bir kural olarak bir rasgele değişkenin böyle bir lineer dönüşümü sonucunda elde edilen yeni rasgele değişken aynı özellikte bir rasgele değişken olur”, bunların toplamı biçiminde meydana gelmiş olan  $\ell_i$  ölçü değeri de,  $\varepsilon_i$  rasgele değişkeninin aynı özelliğinde bir diğer rasgele değişken olmaktadır. Aralarındaki fark sadece sabit bir öteleme değerinden başka bir şey olmamaktadır. O değer de  $\mu_i$  deterministik veya sabit bir sayı kadar olur.

Önceleri, jeodezik gözlemlerin hatalarının deneysel dağılımları ile uğraşılana kadar geçen süre içerisinde, ölçü hataları ile ilgili olan bu düşünce geçersiz sayılmaktaydı. Ne var ki, her türlü jeodezik faaliyetin hız kazandığı son yıllarda yapılan birçok denemede, bu düşünceden vazgeçilmiştir. Jeodezik gözlemlerin büyük bir çoğunlukla normal dağılımda oldukları ve kuramsal dağılımdan sapmaların çok az olduğu açık bir şekilde ortaya konmuştur, (Baarda 1967). Yine aynı deneme sonuçlarından bu sapmaların, dağılımın kuyruk veya uç değerleri göz ardı edilse bile diğer alanlarda da kendilerini az da olsa gösterdikleri ayrıca kanıtlanmıştır. Burada sözü edilen jeodezik gözlemlerin bu şekildeki deneysel ve teorik dağılımlarının arasındaki sapma miktarları çok büyük olmadığı fakat farklı çalışmaların uygun istatistik yöntemler kullanılarak test edilmeleri gerekmediği söylenmektedir, (Stefanovic, 1980). Dağılımlar arasındaki bu farklılıkların, jeodezik denemeler sonucunda özel olarak belirlenmiş, ölçü hatalarıyla ilgili belli sınır değerlerini (hata sınırı formüllerinden hesaplanan değerleri) aşamayacağını göstermesi, sürekli akıllarda tutulması gereken bir diğer konu olmaktadır.

Neticede,  $\varepsilon_i$  ölçü hataları hangi istatistik kural ya da dağılımla incelenirse,  $\ell_i$  jeodezik gözlem değerleri de aynı istatistik kurallarla incelenebilir. Bir diğer ifade ile;  $\varepsilon_i$  ölçü hataları normal dağılımda olduklarından bunlara karşılık gelen  $\ell_i$  jeodezik gözlem değerleri de aynı dağılımda olurlar. Neticede, benzer istatistik yöntemlerle irdelenebilirler.

Jeodezik gözlemler doğal bir olayı temsil ettiklerinden istatistik tanımları gereği, normal dağılımda olan birer rasgele değişken oldukları kabul edilir. Bu durumda, her bir  $\ell_i$  ölçü değerinin yoğunluk fonksiyonu da,  $\mu_i$  umut ve  $\sigma_i$  standart sapma değerlerini (dağılımın parametrelerini) göstermek üzere,

$$f(\ell_i) = \frac{1}{\sigma_{\ell_i} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ell_i - \mu_i}{\sigma_{\ell_i}}\right)^2}$$

şeklinde bir bağıntı ile ifade edilebilir. Ayrıca, normal dağılıma uyan jeodezik gözlemlerin bir kümesi;  $\ell = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$  şeklindeki bir ölçü vektörü ile gösterildiğinde, bunların bileşik çok boyutlu dağılımını temsil eden yoğunluk fonksiyonu;

$$f(\ell; E\{\ell\}, \sigma_0^2 Q_{ll}) = \frac{1}{\sigma_0 (2\pi)^{\frac{n}{2}} |Q_{ll}|^{\frac{1}{2}}} \text{EXP} - \left( \frac{1}{2\sigma_0^2} (\ell - E\{\ell\})^T Q_{ll}^{-1} (\ell - E\{\ell\}) \right)$$

şeklinde verilebilir. Burada;

- $E\{\ell\}$  : Gözlem vektörünün umut değeri,
- $\sigma_0^2 Q_{ll}$  : Gözlemlerin varyans-kovaryans değerlerini içeren bir kare simetrik yapılu matris,
- $\sigma_0^2$  : Gözlemlerin varyans faktörünü

göstermektedir.

Tekrar vurgulamak gerekirse, burada sözü edilmiş olan  $\ell$  gözlem vektörünün rasgele değişken özelliğine sahip ölçülerden kurulu olması, onun normal dağılım parametrelerine göre;

$$\ell \rightarrow N(E\{\ell\}, \sigma_0^2 Q_{ll})$$

şeklinde ifade edilebilmesine de ışık tutmaktadır.

## 2. İSTATİSTİK PARAMETRE TAHMİNİ

Bir dağılımın ortalama değeri ya da varyansı gibi; karakteristik değerleri, o dağılımın temel istatistikleridir. Uygulamada, bir kitlenin diğer ifade ile evrensel kümeye ilişkin bu istatistik değerlerinin her biri arasında kuramsal ve deneysel olarak bir ayırım yapılabilir. Bu duruma bir örnek olarak; bir evrensel kümenin kuramsal umut değeri  $\mu$  ve kuramsal standart sapması için  $\sigma$  değerleri ile bunlara karşılık gelen,  $n$  sonlu sayıdaki örnekleme küme değerleri için de tahmin (*kestirim*) değeri  $\hat{x}$  ve deneysel standart sapması (*karesel ortalama hatası*) için de  $\hat{s}$  ifadelerinin kullanılması verilebilir.

Bilindiği gibi bir istatistik tahmin veya kestirim; bir evrensel kümeden elde edilen  $n$  sonlu sayıdaki örnekleme bilgilerinden evrensel kümenin doğasına uygun olarak  $\mu$  ve  $\sigma$  değerlerini en iyi temsil edecek olan  $\hat{x}$  ve  $\hat{s}$  değerlerinden her birinin belirlenmesi ile ilgili bir istatistik yöntemdir. Genel bir ifade ile; bir evrensel kümenin  $\mu$  ve  $\sigma$  kuramsal istatistik değerlerini elde etmek için kullanılan  $\hat{x}$  ve  $\hat{s}$  örnekleme istatistiği,  $\mu$  ve  $\sigma$ 'nın bir kestirimi yada bir tahmini, bir diğer ifade ile parametre tahmini veya kestirimidir denir. Bu özellikteki kestirim değerleri, kuramsal değerlerden farklı olacakları için onları en iyi temsil eden değerler olurlar. Bu değerler, alışlagelen bir ifade biçimi olarak da,  $\hat{x}$  ve  $\hat{s}$  şeklinde gösterilirler. Sonuçta,  $\hat{x}$  ve  $\hat{s}$  değerleri;  $\mu$  ve  $\sigma$  gerçek değerlerin bir tahmini veya kesin değerleri olarak adlandırılırlar.

Benzer şekilde, kestirim değerleri olarak kullanılabilir örneklem istatistiklerine bir örnek olarak; örneklem *ortalaması*, örneklem *varyansı*, örneklem standart sapması, örneklem medyanı, örneklem aralığı(*range*) verilebilir. Ancak, uygulamada çok sık kullanılan kestirim değerleri olarak; örneklem *ortalaması* ve örneklem *varyansı* parametreleridir.

Bir  $x$  rasgele değişkeninin  $n$  adet gözlemlerinden oluşan bir örneklem için örneklem ortalaması ve örneklem varyansı, genelde;

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad 24$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad 25$$

bağıntıları ile elde edilebilir. Aynı evrensel kümeden başka örneklemeler oluşturulursa, bu yeni örneklemelerin örneklem ortalaması ve varyansının orijinal örneklemenin ortalama ve varyansı ile eşit olur..

Örneklem istatistik değerleri; genel olarak örneklemden örnekleme değişeceği, yani örneklem istatistiği bir değişken olduğu ve her zaman bir dağılıma sahip olacağı, böyle bir dağılımda örneklem dağılımı olarak isimlendirildiği bilinen bir gerçektir. Bu düşünceye göre; burada üç farklı dağılımdan söz etmek mümkündür. Bunlar;

- *Evrensel kümedeki elemanların dağılımı,*
- *Bir örneklemedeki elemanların dağılımı,*
- *Olabilecek tüm örneklemelere göre bir örneklem istatistik değerlerinin dağılımı*

şeklinde sıralanabilir.

Burada, ortalamaların örneklem dağılımı olarak adlandırılan, örneklem ortalama istatistiğinin örneklem dağılımı dikkate alınır, bu dağılım bir ortalamaya ve bir varyansa sahiptir. Böyle bir ortalama (*yada umut*) değeri;

$$E\{\bar{x}\} = E\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\{x_i\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \frac{1}{n} n \mu = \mu \quad 26$$

evrensel kümenin(*popülasyonun*) ortalaması olan deneysel ortalamanın umut değeridir.

Dış merkezli olmayan, diğer bir ifade ile kaba ve sistematik hatalardan arındırılmış, içlerinde sadece rasgele ölçü hatalarının bulunduğu gözlemlerden elde edilen böyle bir kestirim (*unbiased estimator*) veya tahmin değeri, mevcut evrensel kümenin istatistiklerine (*bu tahminin istatistik tahmininin ortalamasına*) eşdeğer olan birer kestirim olmaktadır. Buradan; bu özellikteki gözlem verilerinden elde edilen deneysel ortalama ve deneysel varyans, evrensel kümenin ortalamasının dış merkezli olmayan birer tahminleri oldukları rahatlıkla söylenebilir.

Bu değerler; umut değer için,

$$E\{\hat{\mu}\} = \mu$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i \quad 29$$

ve varyans için de

$$E\{\hat{\sigma}\} = \sigma$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \quad 30$$

olarak hesaplanabilir.

Bir özel evrensel küme ya da yığın istatistiği mümkün olan bazı kestirim değerlerine sahip olabilir. Bunlardan hangisinin daha iyi olduğuna karar vermek için belli sayıda kriterler ya da ölçütler mevcuttur. Bunlardan en çok kullanılanı, iteratif olmayan, her zaman direkt çözüm veren *minimum varyanslı* bir tahmin olan *En küçük kareler kestirimi* ve bunun normal dağılımlı rasgele değişkenler için eşdeğer sonuçlarını veren *Maximum Likelihood tahmin* yöntemleri olmaktadır.

Uygulamada, bunlardan başka birçok kestirim yöntemi daha mevcuttur. Ancak, bunların sonuç istatistikleri olmadığından, burada sadece istatistik özellikleri olan ve rasgele değişken karakterine sahip jeodezik gözlemlerin değerlendirilmesinde sıkça kullanılan her iki kestirim yönteminden kısaca söz edilecektir.

### 3.1. İSTATİSTİK PARAMETRE KESTİRİM YÖNTEMLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Örnekleme kümeden elde edilen kestirim değerlerinin evrensel kümenin istatistiklerini en iyi şekilde temsil edebilmesi için kullanılan kestirim yöntemlerinde bazı ortak özellikler aranmaktadır. Genel anlamda bu tür ortak özellikler dört ana grup altında ele alınabilir. Bunlar; bir kestirim yöntemi için,

- *Tutarlılık(consistence),*
- *Dış Merkezli olmama(unbiased),*
- *Minimum varyanslı olma(minimum variance),*
- *Etkin olma(efficiency and sufficiency)*

şeklinde sıralanabilirler.

Bir  $x$  rasgele değişkenin dağılımına ait bilinmeyen bir  $p$  parametresinin değeri,  $x$  rasgele değişkeninin veri grubundan elde edilen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  değerlerine özel bir istatistik işlem uygulanmak suretiyle elde edilirse; böyle işleme kestirici yada tahmin işlemi, işlem sonucunda bulunan değere de kestirim yada tahmin değeri veya sadece kestirim adı verilir. Bu tahmin işlemi için kullanılan kestirici ise; bir değer değil, bir yöntem olmaktadır. Diğer bir deyişle bir  $p$  parametresinin bir kestiricisi  $\hat{p}$  ile gösterilmek üzere,  $\hat{p}$  'nın değeri,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  verilerinin bir fonksiyonudur. Böyle bir fonksiyon,

$$\hat{p} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad 31$$

olarak ifade edilebilir. Buradan kestirilecek  $\hat{p}$  'nın değeri, veri sayısı sonsuz olmadığı için bir miktar hata taşır. Bu nedenle  $\hat{p}$  'nın değeri  $p$  'nin gerçek parametre değerine eşit



olmamaktadır. Fakat veri sayısı sonsuza yaklaştıkça aradaki fark benzer oranda azalır. Bu durumda,  $\hat{p}$  tahmin değeri onun  $p$  gerçek parametre değerine belli bir miktar yaklaşmış olur.

Ancak ne var ki, bir uygulamadan elde edilen veri sayısının hız, zaman ve ekonomik sınırlamalardan dolayı çok fazla sayıda olması olanaksızdır. Bununla birlikte, çoğu zaman verilerden elde edilen sınırlı bilgilerle gerçek değeri en iyi temsil eden değerlerin bulunması arzulanır. Böyle bir arzu kesin değeri gerçek değerden alabildiğince çok az farklı olan bir kestiricinin kullanılması ile karşılanabilir. Bu nedenle, uygulamada hatası en az olan kestirici en iyi kestiricidir. Aynı zamanda en iyi bir kestiricinin hatası da en azdır. Bu bakımdan iyi bir kestiricinin, tutarlı (*consistency*), yansız (*unbiasedness*), etkili (*efficiency*) ve yeterli (*sufficiency*) olması istenir. Böyle bir kestirim sözü edilen özellikleri kısmen de olsa sağlaması gerekmektedir.

### 3.1.1 Tutarlı Olması

Bir kestiricinin en çok sözü edilen özelliği tutarlılıktır. Tutarlılık *kriterinin* en basit ifadesi, ölçü sayısı sonsuza giderse, kesin değer gerçek değere yaklaşmasıdır. Bu durum analitik olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.  $\hat{p}$  tahmin parametresi;  $n$  elemanlı bir veri grubundan elde edilen bir kestirici değeri,  $p$  değeri de kestirilecek gerçek parametre değeri olduğuna göre, veri sayısı  $n$  sonsuza yaklaştığında  $P(|\hat{p} - p|)$  olasılığı 1 'e yaklaşıyorsa yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P(|\hat{p} - p|)) = 1$$

ya da bir diğer ifade ile;  $n \rightarrow \infty$  için,  $\varepsilon$  çok küçük bir sayı olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{p} - p| < \varepsilon) = 1 \quad 32$$

oluyorsa bu kestirici tutarlı bir kestiricidir denir.

### 3.1.2 Dış Merkezli Olmaması

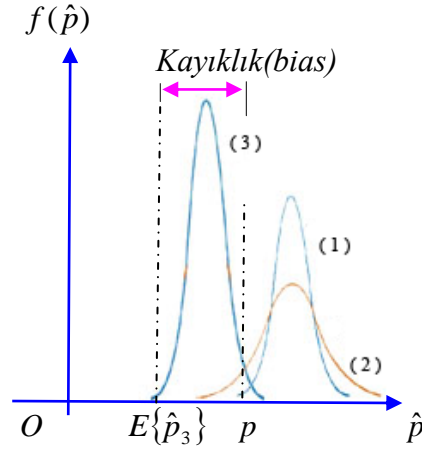
Dış merkezli olmama (*unbiased*) yerine bazen yansız olma sözcüğü de kullanılmaktadır. Yansızlık iyi bir kestiricide bulunması gereken önemli özelliklerden biridir.  $\hat{p}$  tahmin değerinin,  $p$  gerçek parametresinin bir kestiricisi olduğuna göre,  $\hat{p}$  değerlerinin beklenen umut değeri,  $p$  gerçek parametre değerine eşitse,  $\hat{p}$  'nın yansız bir kestirici olduğu söylenebilir. Diğer bir ifade ile bu özellik analitik olarak,

$$E\{\hat{p}\} = p \quad 33$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu durumda yan yada dış merkezlik,

$$E\{\hat{p}\} - p$$

kadar bir değer olmaktadır. Konu bir veri kümesi için grafik olarak incelendiğinde,



Şekil 7: Yanlı ve yansız kestiricilerin dağılımlarının grafiği

Şekil 7 ‘deki gibi geometrik açıklamalar yapılabilir. Buradan görüleceği gibi bir kestirim için sözü edilen dış merkezlik veya kayıklık; verilerdeki sistematik hataların neden olduğu etkiye bağlı olmaktadır. Bu nedenle, iyi bir kestirim için gözlemler kaba ve sistematik hatalardan tam arındırılmış olması gerekmektedir. Verilerdeki böyle bir etki hiçbir zaman deneme ya da gözlem sayısını artırmakla giderilemez. Her zaman verileri dış merkezli ya da kayık olacak şekilde etkilerler.

Şekil 7’de; 1ve2 numaralı dağılım verilerden yapılan kestirim dış merkezli bir kestirim olmamaktadır. Çünkü her ikisinin de  $\hat{p}$  tahmin değeri  $p$  dağılımların gerçek değerlerine eşittir. Ancak, 1 ve 2 numaralı dağılımlarla 3 numaralı dağılımlar arasında bir kayıklık söz konusudur. Yani; 3 numaralı dağılım verilerinden kestirilen  $E\{\hat{p}\}$  tahmin değeri  $E\{\hat{p}\} - p$  kadar kayık ya da dış merkezli bir kestirim olmaktadır. Bu durum, kestirimin doğruluğu ile ilgili bir ölçüt olmaktadır.

Sonuçta; 1ve 3dağılımların presizyonu ya da inceliği 2 dağılımına oranla fazla olmasına rağmen, 1 ve 2 numaralı dağılımlar 3 numaralı dağılımdan daha doğru olmaktadır.

### 3.1.3 En Küçük Varyanslı Olması

Bir kestirim işleminde her zaman  $\hat{p}$  kestirim sonucunun varyansının en küçük olması arzulanır. Böyle bir kestirim varyansının küçük olması ölçüsünde kestiricinin türü de çok etkilidir. Neticede, aynı parametrenin yansız iki kestiricisinden elde edilmiş varyansı için küçük değerli olanı daha etkilidir. Bu durum, *şekil 7* de her üç dağılım eğrilerinin

karşılaştırılmasından da açıkça görülebilir. Böyle bir özellik aynı zamanda, kestirimin presizyonu yanında doğruluğu ile de ilgili bir ölçüt olmaktadır.

Burada, 1ve 3numaralı dağılımlarının presizyonu yada inceliği 2 numaralı dağılıma oranla daha fazla olmasına rağmen, 2 numaralı dağılımdan kestirilecek parametre değerleri, 3numaralı dağılıma oranla daha doğru olmaktadır. Ancak, 3 numaralı dağılım 1ve 2numaralı dağılıma göre çok daha presizyonlu bir dağılım olduğu ilgili dağılım grafiklerinden de açıkça söylenebilir.

Buradan görüldüğü gibi, presizyon ölçütü verilerin birbiriyle olan yakınlığı ile ilgili bir kriter olmaktadır. Aynı zamanda, verilerin tahmin değeri ya da kesin değeri etrafındaki yayılmasının ya da dispersiyonunun bir ölçütü olmaktadır. Doğruluk ise, verilerin gerçek değere olan yakınlığının bir ölçütüdür. Diğer bir ifade ile verilerin gerçek değer etrafındaki yayılmasının bir ölçütü olmaktadır. Bu durumda, 3 numaralı dağılım en etkin, yani; en küçük varyanslı bir dağılım olmaktadır. Buna karşılık doğruluğu en azdır. Neticede, bir deneysel veri kümesinden hesaplanan karesel ortalama hata;

$$\begin{aligned} \text{Karesel ortalama hata} &= \sqrt{E\{(\hat{p} - E(\hat{p}))^2\}} = \\ &= \sqrt{(\text{bias})^2 + (\text{presizyon})^2} = \quad 34 \\ &= \sqrt{(\text{bias})^2 + \sigma^2} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan, presizyonun ölçütünün standart sapma değeri, karesel ortalama hatanın verilerin dış merkezli olmalarını da içeren bir doğruluk ölçütü olduğu açıkça görülmektedir. Verilerin dış merkezli olmayıp, rasgele değişken özelliğinde olmaları halinde karesel ortalama hata presizyona eşdeğer bir ölçüt olur. Bu nedenle, uygulamalarda çoğu zaman birbiri yerine kullanılarak bir kavram kargaşasına sebep olurlar.

Neticede; bir deneme neticesinde veriler için hesaplanan karesel ortalama hatanın presizyona denk bir ifade olabilmesi için, deney sonuçlarının veya ölçme sonuçlarının sistematik etkilerden tamamıyla arındırılmış değerler olmaları gerekir. Aksi halde dışmerkezli verilerden hesaplanan karesel ortalama hata yanlış bir değer olur.

### 3.1.4. Yeterli ve Verimli Olması

Yeterlilik,  $\hat{p}$  kestiricisinin,  $p$  parametresiyle ilgili olarak veriden sağlanabilecek en çok bilgiyi kullanması olarak tanımlanır. Örneğin  $n$  elemanlı bir veri grubundaki tüm ölçüleri kullanarak hesaplanan aritmetik ortalama, gerçek değer için yeterli bir kestiricidir. Fakat ölçülerin bir kısmını, örneğin en küçük ve en büyük ölçme sonuçlarını, kullanarak hesaplanan aritmetik ortalama yeterli bir kestirici değildir. Bu duruma bir örnek olarak; her birinin standart sapması  $\sigma$  kadar olan  $n$  adet veriden aritmetik ortalama almak suretiyle hesaplanan  $\bar{x}$  kesin değerinin standart sapma değeri de,

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad 35$$

kadar olur.

Bu durumda;  $\sigma_x^2 < \sigma^2$  olduğu için aritmetik ortalama değeri her bir ölçü yada veri değerine oranla daha verimli ve yeterli bir değer olmaktadır. Çünkü, aritmetik ortalama, her bir veriye göre;

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma^2} = \frac{1}{n}$$

36

oranında daha küçük bir değer olmaktadır.

Neticede, veri ya da ölçü sayısı arttıkça bir kestirimin yeterliliği veya verimliliği de ona eşdeğer oranda artmaktadır. Bunun sonucunda, sonlu sayıda veri kümesinden kestirilen tahmin değerleri; her bir veriye göre gerçek değere daha yakın bir değer olur.